

Sayısal İşaret İşleme Dersi Laboratuvarı

Ad Soyad:

Numara:

İmza:

Li Tan Digital Signal Processing: Fundamentals and Applications

SAYISAL FİLTRELER

Deneyin Amacı

Sayısal filtre tasarımının ve kullanılmasının öğrenilmesi.

Kapsam

Ayrık zamanlı bir sistemin transfer fonksiyonunun elde edilmesi. Filtrenin frekans tepkesinin elde edilmesi. Direct Form-I ve Direct Form-II ile filtre gerçekleştirilmesi. Sayısal filtre tasarımı. FIR ve IIR filtreler.

1. Giriş

Girişi $x(n)$ çıkışı $y(n)$ ile gösterilen sayısal bir sistem aşağıdaki gibi bir fark denklemi ile ifade edilmektedir.

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + \dots + b_Mx(n-M) - a_1y(n-1) \dots - a_Ny(n-N) \quad (1)$$

Yukarıda belirtilen sayısal sistem bir filtreyi de ifade edebilir. Herhangi bir $x(n)$ girişine karşılık gelen çıkış değerleri; başlangıç koşullarının $(y(-1), y(-2), x(-1), x(-2))$ gibi bilinmesi durumunda denklem (1) yardımı ile elde edilebilir. Matlab'taki **filtic** ve **filter** komutları yardımı ile sayısal bir filtrenin çıkışı elde edilebilir.

$$Z_i = \text{filtic}(B, A, Y_i, X_i)$$

$$y = \text{filter}(B, A, x, Z_i) \quad (2)$$

Yukarıdaki denklemlerde $A = [1 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_N]$, $B = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_M]$, $Y_i = [y(-1) \ y(-2) \ \dots]$ ve $X_i = [x(-1) \ x(-2) \ \dots]$ 'dir.

Deney1

$y(n) = 2x(n) - 4x(n-1) - 0.5y(n-1) - y(n-2)$ olan sistemin girişi $x(n) = (0.8)^n u(n)$ olduğunda çıkışının ilk 20 örneğini Matlab yardımı ile bulup çizdiriniz.

- Başlangıç koşullarını $y(-2) = 1, y(-1) = 0, x(-1) = -1$ alınız.
- Başlangıç koşullarını sıfır alınız.

Başlangıç koşulları 0 kabul edilir ve denklem (1)'in Z dönüşümü alınırsa transfer fonksiyonu $H(z)$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_Mz^{-M}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_Nz^{-N}} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (3)$$

Sayısal İşaret İşleme Dersi Laboratuvarı

Ad Soyad:

Numara:

İmza:

Li Tan Digital Signal Processing: Fundamentals and Applications

Laplace dönüşümü ve Z dönüşümü arasındaki $z = e^{sT}$; (T : örnekleme periyodu) dönüşüm kullanılarak sayısal bir sistemin frekans tepkisi elde edilebilir. Bilindiği gibi yakınsama bölgesi $j\omega$ eksenini kapsayan bir sistemin frekans tepkisi $s = j\omega$ yazılarak bulunabilir.

$$H(z) = H(e^{sT}) = H(e^{j\omega T}) = H(e^{j\Omega}) \quad (4)$$

Denklem (4)'teki Ω 'nın 0 ile π arasındaki değerleri için $H(e^{j\Omega})$ 'yı elde etmek yeterlidir çünkü $H(e^{j\Omega})$ periyodiktir ve bir periyodu 0 ile π arasındadır. $H(e^{j\Omega})$ 'nın 0 ile π arasındaki değerleri dışında kalan değerleri zaten ADC'de bulunan alçak geçiren süzgeç tarafından geçirilmeyecektir. Sayısal bir filtrenin genlik tepkisi dB cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir.

$$|H(e^{j\Omega})|_{dB} = 20\log(|H(e^{j\Omega})|) \quad (5)$$

Filtrenin radyan cinsinden elde edilen frekans tepkisi $\frac{\Omega}{2\pi} f_s$ dönüşümü ile Hz'e çevrilebilir.

Matlab'ta bulunan **freqz()** komutu ile filtrenin frekans tepkisi elde edilebilir. Aşağıda **freqz()** komutunun kullanılışı gösterilmektedir.

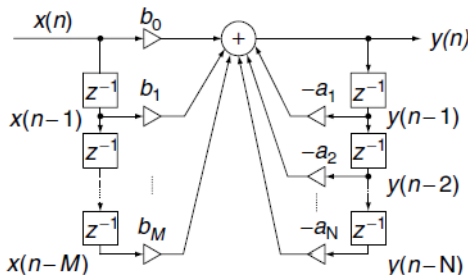
$$[h,w]=\text{freqz}(B,A,N) \quad (6)$$

Yukarıdaki denklemdeki N frekans tepkisi elde edilirken kaç tane nokta kullanılacağını belirtmektedir yani değerler $\frac{\pi}{N}$ adımlarla elde edilmektedir.

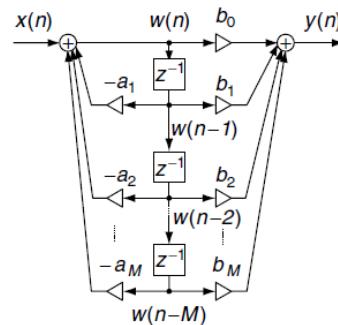
Deney 2

- a) $H(z) = \frac{z}{z-0.5}$
- b) $H(z) = 1 - 0.5z^{-1}$
- c) $H(z) = \frac{0.5z^2-0.32}{z^2-0.5z+0.25}$

Transfer fonksiyonları yukarıda verilen filtrelerin genlik (dB) ve faz tepkelerini Matlab ile çizdiriniz.



Şekil 1. Direct Form-I



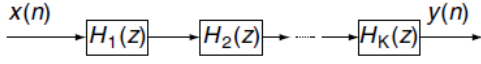
Şekil 2. Direct Form -II

Not: $w(n) = x(n) - a_1w(n-1) - \dots - a_Mw(n-M)$

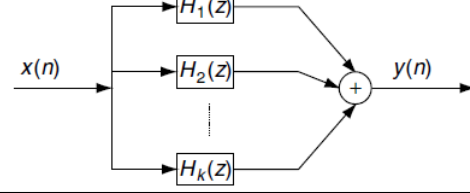
Sayısal İşaret İşleme Dersi Laboratuvarı

Ad Soyad:
Numara:
İmza:

Li Tan Digital Signal Processing: Fundamentals and Applications



Şekil 3. Seri



Deney 3

Sesin yüksek frekanslı bileşenleri diğerlerine oranla daha zayıf olabilir. Ses kodlama gibi uygulamalarda bu frekansları gözden kaçırmamak amacı ile ön vurgulama filtresi kullanılır. Böyle bir ön vurgulama işlemini gerçekleştirebilecek basit bir sayısal filtrenin fark denklemi aşağıdaki gibidir.

$$y(n) = x(n) - \alpha x(n - 1)$$

- Matlabın freqz ve filter komutlarını kullanarak $\alpha = 1$, $f_s = 8000\text{Hz}$ alıp filtrenin genlik ve faz tepkisini frekansa göre çizdiriniz.
- Matlabta bulunan load komutu ile matlabta bulunan train.mat isimli dosyayı (load train.mat) yükleyip bu dosyadaki sesi filtreden geçiriniz.
- Filtrelenmiş ve filtrelenmemiş sesi zaman domeninde ve frekans domeninde çizdiriniz. Frekans domeninde çizdirirken yatay eksen Hz, zaman domeninde ise sn olacaktır. Ayrıca frekans domenine geçmek için fft komutu kullanılacaktır.
- Elde ettiğiniz spektrumları tek taraflı tayf biçiminde çizdiriniz.
- Bilindiği gibi ayrık Fourier dönüşümü işleminde dönüşümü alınacak işaretin dönüşümde kullanılan nokta adedinden sonra ve önce periyodik bir biçimde devam ettiği varsayılmaktadır. Yani periyodik bir ayrık zamanlı işaretin, $0 \dots N-1$ arasındaki değerlerinin, $0 \dots N-1$ arasındaki örnek değerleri 1 diğerleri 0 olan bir darbe ile çarpıldığı varsayılmaktadır. Buna pencereleme denilmektedir. Bazı durumlarda kare darbe pencerelemesi yerine üçgen, Hamming gibi başka pencereler kullanılması daha iyi sonuç vermektedir. Matlabtaki fft komutunun kullanımını yardım dosyasından araştırıp c ve d seçeneğindeki işlemleri farklı pencere fonksiyonları için tekrarlayınız.

2. FIR Filtre

Bir FIR filtresinin birim vuruş tepkesi sonlu sayıda örnek içerir ve aşağıdaki fark denklemi ile tanımlanır.

$$y(n) = \sum_{i=0}^K b_i x(n-i) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_K x(n-K) \quad (7)$$

Denklem (7)'nin Z dönüşümü alındığında aşağıdaki ifade elde edilir.

Sayısal İşaret İşleme Dersi Laboratuvarı

Ad Soyad:

Numara:

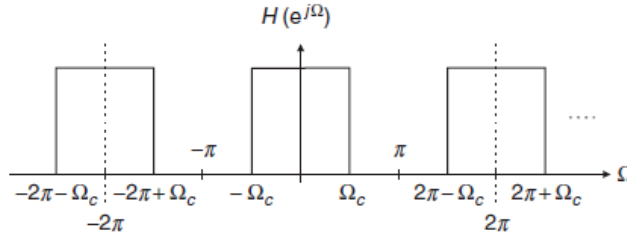
İmza:

Li Tan Digital Signal Processing: Fundamentals and Applications

$$Y(z) = b_0X(z) + b_1z^{-1}X(z) + \dots + b_Kz^{-K}X(z) \Rightarrow H(z) = b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_Kz^{-K} \quad (8)$$

Aşağıda ideal alçak geçiren süzgecin frekans tepkisi gösterilmektedir. Bilindiği gibi transfer fonksiyonunda $z = e^{j\Omega}$ yazılırsa $H(e^{j\Omega})$ elde edilir.

İdeal alçak geçiren süzgecin frekans tepkisi yukarıdaki şekilden de görüldüğü gibi $0 \leq |\Omega| \leq \Omega_c$ için $H(e^{j\Omega}) = 1$ ve $\Omega_c < |\Omega| < \pi$ için $H(e^{j\Omega}) = 0$. Burada Filtre tasarımında kullanılan Fourier dönüşümü yönteminde kısaca bahsedilecektir. Frekans tepkisi $H(e^{j\Omega})$ periyodik olduğundan (periyodu 2π) $H(e^{j\Omega})$ 'yı Fourier serisine açarsak $H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-j\omega_0 n \Omega}$ ifadesi elde edilir.



Şekil 6. Sayısal ideal alçak geçiren süzgecin frekans tepkisi

$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-j\omega_0 n \Omega}$ ifadesinde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ 'dir. Fourier serisi katsayısı $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} 1 d\Omega = \frac{\Omega_c}{\pi}$ ve $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{jn\Omega} d\Omega = \frac{\sin(\Omega_c n)}{\pi n}$; $n \neq 0$ olarak elde edilir.

Sonuç olarak ideal alçak geçiren süzgeç için

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-j\omega_0 n \Omega} \Rightarrow H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n}; c_0 = \frac{\Omega_c}{2\pi}; c_n = \frac{\sin(\Omega_c n)}{\pi n}; n \neq 0 \quad (9)$$

biçiminde tasarlanmış olur. Daha önce bahsedildiği gibi FIR filtrenin vuruş tepkisi sonlu sayıda bileşen içerir. Dolayısı ile c_n katsayılarının baskın olan M tanesi tasarımda kullanılmalıdır. Nedensel olmayan FIR filtre için $c_n = h(n)$ alınırsa;

$$H(z) = h(M)z^M + \dots + h(1)z^1 + h(0) + h(1)z^{-1} + \dots + h(M)z^{-M} \quad (10)$$

elde edilir. Filtrenin nedensel olması için vuruş tepkisi M örnek kadar geciktirilir ve aşağıda transfer fonksiyonu verilen $2M+1$ tap'lık filtre elde edilir.

$$H(z) = b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_{2M}z^{-2M} \text{ ve } b_n = h(n - M), n = 0, 1, \dots, 2M \quad (11)$$

Anlatılan yöntemle yüksek geçiren, bant durduran, bant geçiren gibi diğer FIR filtre çeşitleri de tasarlanabilir. Ancak bu işlemlerin her defasında tekrarlanmasına gerek yoktur. İzlenecek olan adımlar belli olduğundan Matlab gibi programlarla filtre tasarımı

Sayısal İşaret İşleme Dersi Laboratuvarı

Ad Soyad:

Numara:

İmza:

Li Tan Digital Signal Processing: Fundamentals and Applications

gerçekleştirilebilir. Bu tasarım yönteminde Fourier serisi kullanımıdır ancak Fourier serisi süreksiz olan noktalarda (ideal filtredeki kesim frekansı) Gibbs olayından ötürü orijinal işarete yakınsamamaktadır. Bu sorunun etkisini azaltmak için pencere (window) fonksiyonu tasarımlarda kullanılabilir ($h_w(n) = h(n)w(n)$). Öte yandan filtre tasarımında pencere yönteminden farklı yöntemler de kullanılmaktadır.

Filtre tasarımında kullanılabilecek yöntemlerden biri de frekansta örnekleme yöntemidir. Frekansta örnekleme yönteminde istenilen filtrenin frekans tepkesinden faydalanarak filtre tasarlanmaktadır. Bu sebeple tasarımı daha esnektir. Nedensel bir FIR filtrenin birim vuruş tepkesinin $h(n), n = 0, 1, \dots, N - 1$ olduğunu varsayalım. Birim vuruş tepkesi $h(n)$ 'e denk gelen ayrık Fourier dönüşümü katsayıları da $H(k), k = 0, 1, \dots, N - 1$ gösteriliyor olsun. Tasarlanmak istenen bir filtrenin frekans tepkesi örneklendiğinde $H(k)$ elde edilmiş olacaktır. Ayrık ters Fourier dönüşümü ile filtre katsayıları aşağıdaki gibi elde edilebilir.

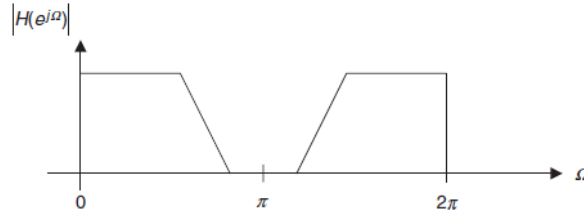
$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) W_N^{-nk}, n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (12)$$

$$W_N = e^{-\frac{j2\pi}{N}} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) - j\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right) \quad (13)$$

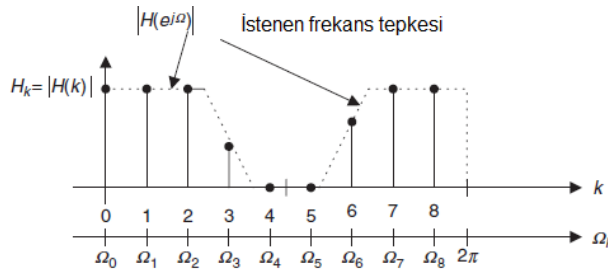
Filtrenin tap sayısı $N = 2M + 1$ olarak alınırsa denklem (12) aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir.

$$h(n) = \frac{1}{2M+1} \left\{ H_0 + 2 \sum_{k=0}^M H_k \cos\left(\frac{2\pi k(n-M)}{2M+1}\right) \right\}, n = 0, 1, \dots, 2M \quad (14)$$

Yukarıdaki denklemde H_k tasarılmak istenen filtrenin frekans tepkesinin örneklenmesi sonucu elde edilen örnek değerleridir.



Şekil 7. Tasarlanmak istenilen filtrenin frekans tepkesi



Şekil 8. Örneklenmiş frekans tepkesi

Şekil (8)'den de görüldüğü gibi tasarlanmak istenen filtrenin frekans tepkesi $\Omega_k = \frac{2\pi k}{2M+1}$ aralıklarla alınan örneklerle elde edilmektedir. Filtre katsayılarının ilk yarısı elde edildikten

Sayısal İşaret İşleme Dersi Laboratuvarı

Ad Soyad:

Numara:

İmza:

Li Tan Digital Signal Processing: Fundamentals and Applications

sonrakiler $h(n) = h(2M - n), n = M + 1, \dots, 2M$ olduğundan hesaplama yapmadan elde edilebilir.

Deney 4

Parametreleri aşağıda verilen 5 taplık band geçiren bir filtreyi Matlab'ın **fdatool()** filtre tasarlama aracını kullanarak tasarlayınız. Frekans ve faz tepkesini çizdiriniz.

Not: Dikdörtgen (rectangular) pencere kullanınız.

Alt kesim frekansı=2kHz

Üst kesim frekansı=2.4kHz

Örnekleme frekansı=8kHz

Deney 5

Parametreleri aşağıda verilen 25 taplık alçak geçiren bir filtreyi Matlab'ın **fdatool()** filtre tasarlama aracını kullanarak tasarlayınız. Frekans ve faz tepkesini çizdiriniz.

Not: Dikdörtgen (rectangular), ve Hamming pencere kullanınız.

Kesim frekansı=2kHz

Örnekleme frekansı=8kHz

Tasarladığınız filtreden load train.mat ile yüklenen sesi geçiriniz. Sesin filtreden geçtikten sonra ve geçmeden önceki spektrumunu çizdiriniz.

Deney 6

Bir veri yakalama sisteminde 500Hz'lik sinüs dalgası kaydedilmiştir. Gürültülü olarak kaydedilen dalga aşağıda gösterilmektedir. Not: Örnek sayısını 500 alınız.

$$x(n) = 1.4141 \sin\left(\frac{2\pi 500n}{8000}\right) + v(n)$$

Tasarlanacak bir alçak geçiren filtre ile gürültü azaltılmak istenmektedir. Zira istenen sinyalin spektrumu 0-800Hz arasındadır. Buna göre kesim frekansı 900Hz olan 133taplık alçak geçiren filtreyi Hamming penceresi kullanarak tasarlayınız. İşaretin ($x(n)$) filtrelenmiş ve filtrelenmemiş halini hem zaman hem frekans bölgesinde çizdiriniz.

3. IIR Filtre

IIR filtrenin girişi ve çıkışı arasındaki ilişki denklem (1)'deki gibi transfer fonksiyonu da denklem (3)'teki gibidir. IIR filtrenin birim vuruş tepkisi sonsuz sayıda bileşen içerir. Öte yandan IIR filtrenin transfer fonksiyonu, $H(z)$ 'nin paydası 1 olmadığından tasarımında kutuplar göz önüne alınmalı ve kararlı olabilmesi için kutupların birim çember içinde olması sağlanmalıdır. FIR filtreye göre daha az sayıda hesaplama gerektirir ancak FIR filtrenin kolay sağlayabildiği doğrusal fazı elde etmesi zordur. Bu sebeple IIR filtre daha az işlem ile gerçekleştirilebilecek bir filtreye ihtiyaç duyulduğunda ancak doğrusal fazın önemli olmadığı

Sayısal İşaret İşleme Dersi Laboratuvarı

Ad Soyad:

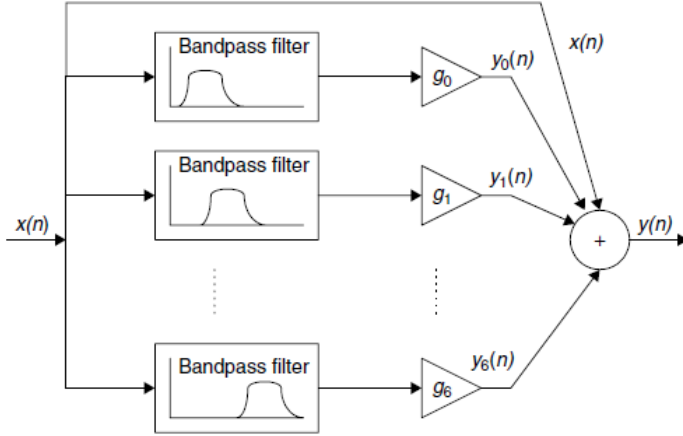
Numara:

İmza:

Li Tan Digital Signal Processing: Fundamentals and Applications

durumlarda kullanılır. IIR filtre tasarımı adımlarından bahsedilmeyecektir. Konuyla ilgili daha ayrıntılı bilgi için [1]'e başvurulabilir. IIR filtre tasarlamak için analog filtrelelerin transfer fonksiyonlarına dönüşüm uygulanabilir.

Deney 7



Ses sinyali yukarıda gösterilen bir equalizer'dan geçirilecektir. Equalizerda kullanılan band geçiren filtreler Butterworth filtrenin transfer fonksiyonundan elde edilen IIR filtrelerdir [1].

Bu filtrelerle ilişkin katsayılar aşağıda verilmektedir.

$B0=[0.0031954934 \ 0 \ -0.0031954934];$

$A0=[1.0000000000 \ -1.9934066716 \ 0.9936090132];$

$B1=[0.0063708102 \ 0 \ -0.0063708102];$

$A1=[1.0000000000 \ -1.9864516324 \ 0.9872583796];$

$B2=[0.0126623878 \ 0 \ -0.0126623878];$

$A2=[1.0000000000 \ -1.9714693192 \ 0.9746752244];$

$B3=[0.0310900413 \ 0 \ -0.0310900413];$

$A3=[1.0000000000 \ -1.9181849043 \ 0.9378199174];$

$B4=[0.0746111954 \ 0.0000000000 \ -0.0746111954];$

$A4=[1.0000000000 \ -1.7346085867 \ 0.8507776092];$

$B5=[0.1663862883 \ 0.0000000000 \ -0.1663862884];$

$A5=[1.0000000000 \ -1.0942477187 \ 0.6672274233];$

$B6=[0.3354404899 \ 0.0000000000 \ -0.3354404899];$

$A6=[1.0000000000 \ 0.7131366534 \ 0.3291190202];$

$$x(n) = \sin\left(\frac{200\pi n}{44100}\right) + \sin\left(\frac{400\pi n}{44100} + \frac{\pi}{14}\right) + \sin\left(\frac{800\pi n}{44100} + \frac{\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{2000\pi n}{44100} + \frac{3\pi}{14}\right) \\ + \sin\left(\frac{5000\pi n}{44100} + \frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{12000\pi n}{44100} + \frac{5\pi}{14}\right) + \sin\left(\frac{30000\pi n}{44100} + \frac{3\pi}{7}\right)$$

Biçiminde verilen bir test sinyali bu sistemin girişine uygulanmaktadır. Filtrelerin kazançları $g_0 = 10, g_1 = 10, g_2 = 0, g_3 = 0, g_4 = 0, g_5 = 10, g_6 = 10$ 'dur.

Laboratuvarı mevcut olan ve yukarıdaki parametrelere göre çalışan programı çalıştırıp yapılan işlemin sonuçlarını analiz ediniz. Programda hangi fonksiyonun neden kullanıldığını belirtiniz.

Sayısal İşaret İşleme Dersi Laboratuvarı

Ad Soyad:

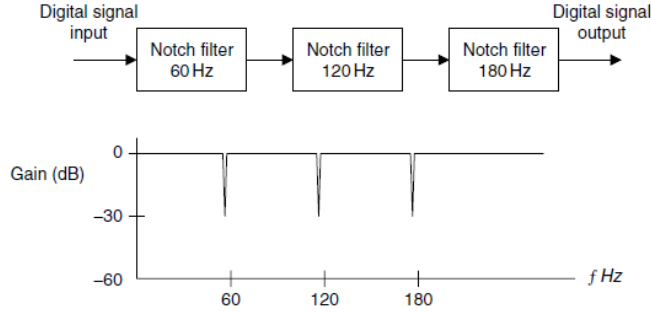
Numara:

İmza:

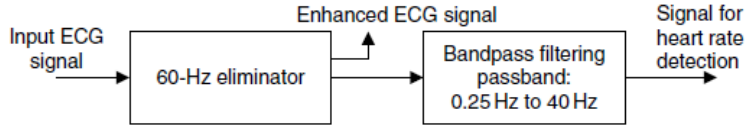
Li Tan Digital Signal Processing: Fundamentals and Applications

Deney 8

ECG sinyaline karışan 60Hz'lik şebeke gürültüsü ve bunun 120, 180Hzdeki harmoniklerini elemine etmek için aşağıdaki sistem kullanılabilir [1].



Şebeke gürültüsü elendikten sonra kalp atışlarını detekte edebilmek için DC kayma ve kas etkileri de elemine edilmelidir. Bu amaçla da aşağıda gösterildiği gibi band geçiren süzgeç kullanılmaktadır. Band geçiren süzgeç FIR yada IIR olabilir.



Laboratuvarında mevcut olan ve yukarıdaki parametrelere göre çalışan programı çalıştırıp yapılan işlemin sonuçlarını analiz ediniz. Programda hangi fonksiyonun neden kullanıldığını belirtiniz.

4. Kaynaklar

1. Tan, L., Digital Signal Processing Fund. and App., Academic Press, 2008